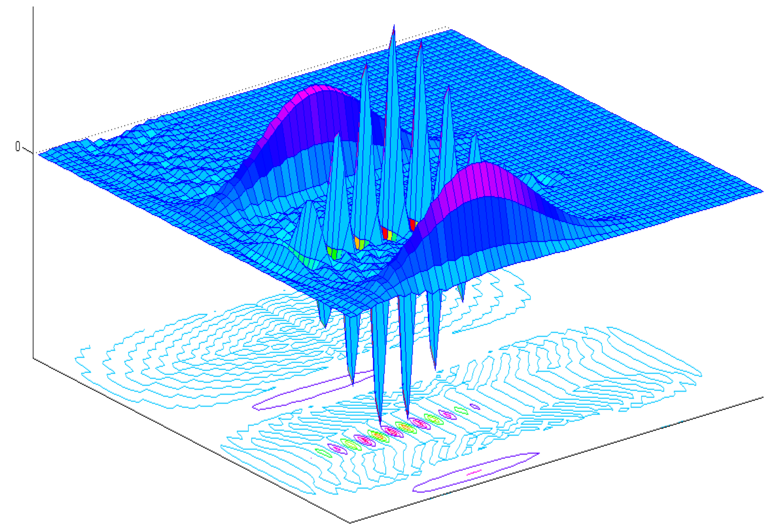
Karlsruher Institut für Technologie

5. Übung Methoden der Signalverarbeitung

Wintersemester 2014/2015

Institut für Industrielle Informationstechnik

Wigner-Ville-Verteilung



Übungstermine WS 13/14

- 6. Übung: 29.01.15
- 7. Übung: 05.02.15
- 8. Übung: 12.02.15

- Zusatztermine (freiwillig):
  - Fragestunde: 12.02.15, 17:00 Uhr
  - Probeklausur: 13.02.15, 17:00 Uhr
  - Ort: Seminarraum IIIT (Westhochschule, Geb. 06.35)

1. Ambiguitätsfunktion
2. Wigner-Ville-Verteilung
3. Kreuzterme bei der Wigner-Ville-Verteilung

1. Ambiguitätsfunktion

Korrelationsfunktion

- Vergleich eines zeitverschobenen Signals mit dem ursprünglichen Signal

$$R_{xx}^{E}(\tau) = \langle x(t+\tau), x(t) \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) x^*(\tau) dt$$

$$\overset{\mathcal{F}_f}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ S_{xx}(f) = |X(f)|^2$$

- Fourier-Transformierte: spektrale Energiedichte

1. Ambiguitätsfunktion

„Korrelationsfunktion“ im Frequenzbereich

- Vergleich eines frequenzverschobenen Signals mit dem ursprünglichen Signal

$$\rho_{xx}^{E}(\vartheta) = \langle x(t)\,\mathrm{e}^{j2\pi\vartheta t}, x(t)\rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{j2\pi\vartheta t} x^*(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\mathcal{F}_t}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; s_{xx}(t) = |x(t)|^2$$

- Fourier-Transformierte: zeitliche Energiedichte

1. Ambiguitätsfunktion

Ambiguitätsfunktion

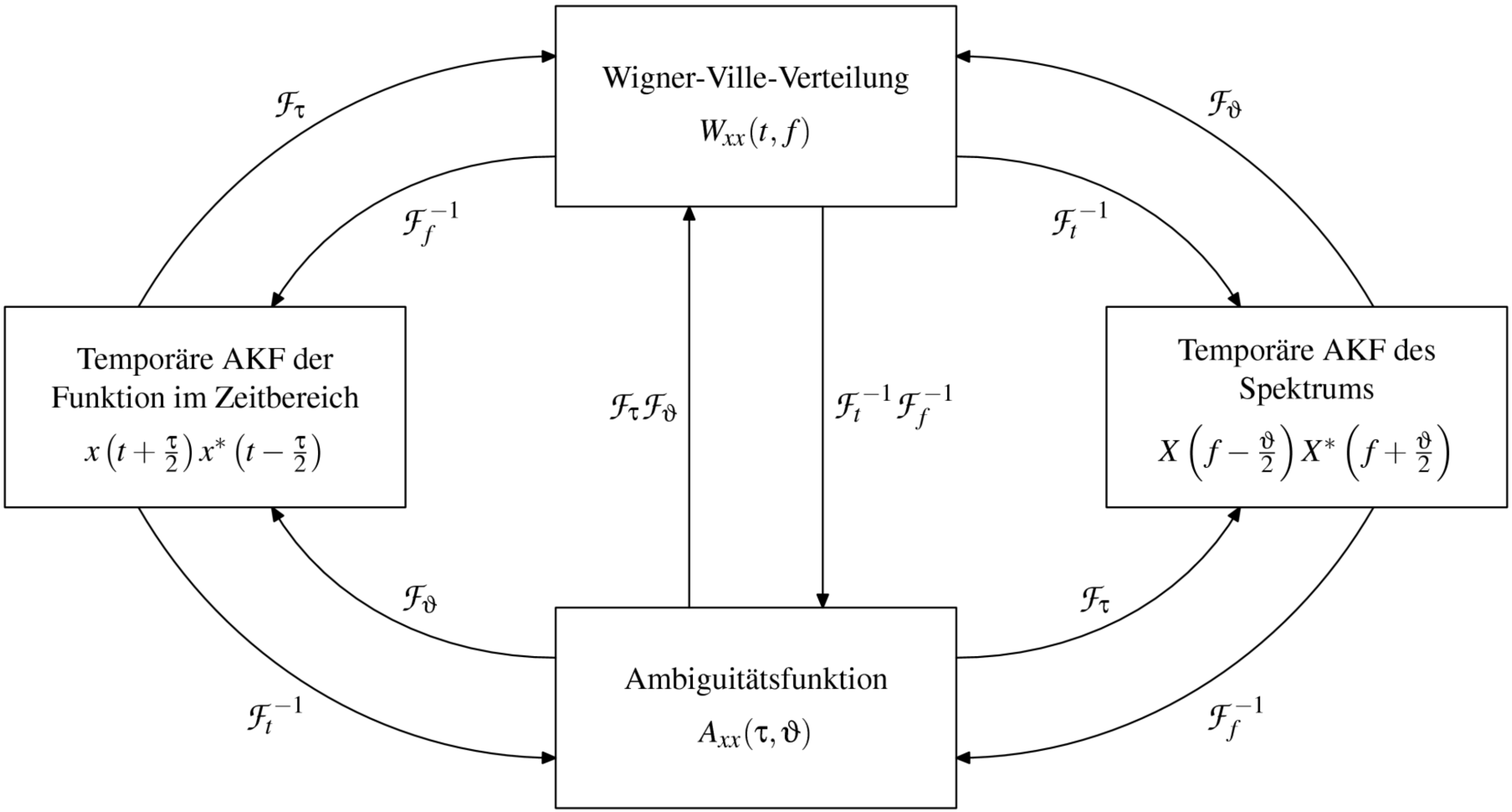
- Vergleich eines zeit- *und frequenzverschobenen* Signals

$$A_{xx}(\tau,\vartheta) = \left\langle x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi(\vartheta/2)t}, x\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi(\vartheta/2)t}\right\rangle_t$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi\vartheta t}\,\mathrm{d}\,t \stackrel{\mathcal{F}_\tau \mathcal{F}_\vartheta}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$$

$$W_{xx}(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f\tau}\,\mathrm{d}\,\tau$$

- zweifach Fourier-Transformierte: Wigner-Ville-Verteilung

2. Wigner-Ville-Verteilung



2. Wigner-Ville-Verteilung

Eigenschaften

- Integration über die Zeit → spektrale Energiedichte

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t,f)\,\mathrm{d}\,t = |X(f)|^2$$

- Integration über die Frequenz → zeitliche Energiedichte

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t,f)\,\mathrm{d}\,f = |x(t)|^2$$

- Integration über Zeit und Frequenz → Signalenergie

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t,f)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,f = E_x$$

2. Wigner-Ville-Verteilung

Eigenschaften

- Translationsinvarianz

$$x'(t) = x(t - t_x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad W_{x'x'}(t,f) = W_{xx}(t - t_x, f)$$

$$x'(t) = x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_x t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad W_{x'x'}(t,f) = W_{xx}(t, f - f_x)$$

$$x'(t) = x(t - t_x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_x t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad W_{x'x'}(t,f) = W_{xx}(t - t_x, f - f_x)$$

- Affininvarianz

$$x_a(t) = \frac{1}{|a|^{1/2}}\, x\left(\frac{t}{a}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad W_{x_a x_a}(t,f) = W_{xx}\left(\frac{t}{a}, af\right)$$

- Moyals Formel

$$\left|\langle x(t), y(t)\rangle_t\right|^2 = \langle W_{xx}(t,f), W_{yy}(t,f)\rangle_{t,f}$$

Folgerungen aus Moyals Formel

- Spektrogramm

$$
\begin{aligned}
S_x^\gamma(t,f) = \left|F_x^\gamma(t,f)\right|^2 &= \left|\left\langle x(t'),\, \gamma(t'-t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f t'}\right\rangle_{t'}\right|^2 \\
&= \langle W_{xx}(t',f'), W_{\gamma\gamma}(t'-t,f'-f)\rangle_{t',f'}
\end{aligned}
$$

- Skalogramm

$$
\begin{aligned}
\left|W_x^\psi(a,b)\right|^2 &= \left|\left\langle x(t), \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\rangle_t\right|^2 \\
&= \left\langle W_{xx}(t,f), W_{\psi\psi}\left(\frac{t-b}{a}, af\right)\right\rangle_{t,f}
\end{aligned}
$$

3. Kreuzterme bei der Wigner-Ville-Verteilung

Kreuzterme

- Bei der Wigner-Ville-Verteilung wird das Signal quadriert. Dadurch entstehen *Kreuzterme* oder *Interferenzterme.*

- Wigner-Ville-Verteilung einer Summe von Signalen

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad W_{xx}(t,f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j^* W_{x_i x_j}(t,f)$$

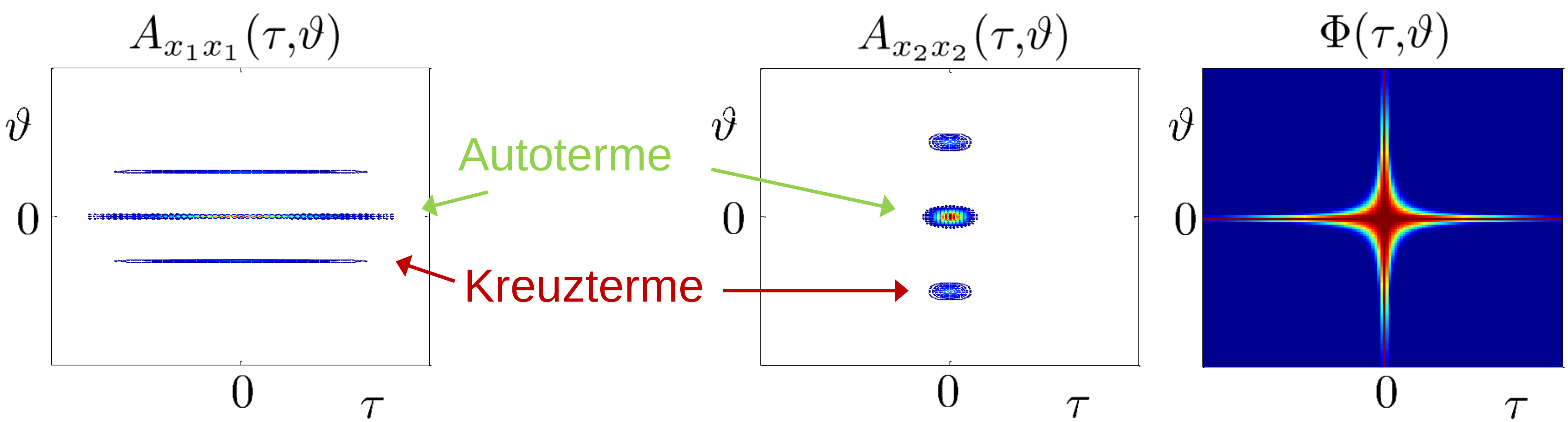
Als Kreuzterme werden die Terme bezeichnet, die für $i \neq j$ entstehen

3. Kreuzterme bei der Wigner-Ville-Verteilung

Im Ambiguitätsbereich:

- Autoterme liegen meist im Bereich der Achsen
- Kreuzterme liegen meist außerhalb

z.B.: $x_1(t) = e^{j2\pi f_2 t} + e^{j2\pi f_3 t}$ $\qquad$ $x_2(t) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4}\left(e^{-\frac{a}{2}t^2} + e^{-\frac{a}{2}t^2} e^{j2\pi f_1 t}\right)$

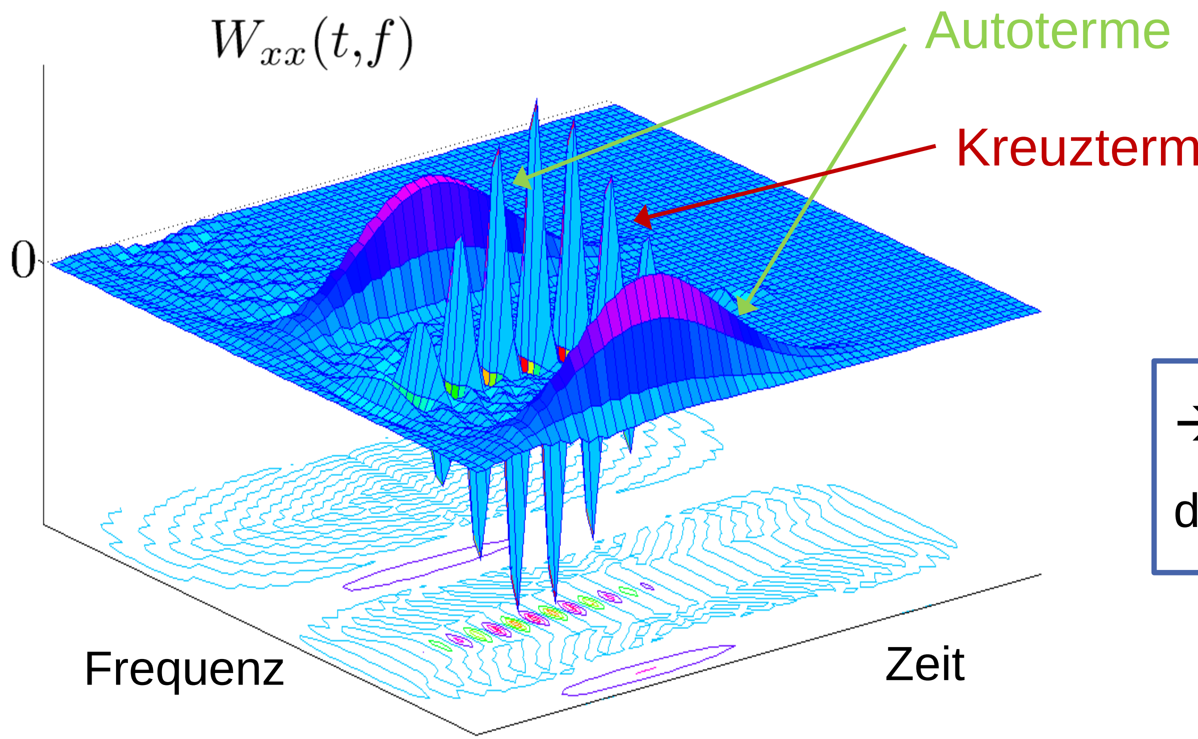


→ Ambiguitätsbereich eignet sich zur Trennung von Nutz- und Kreuztermen

3. Kreuzterme bei der Wigner-Ville-Verteilung

Im Zeit-Frequenz-Bereich:

- Autoterme sind nichtnegativ
- Kreuzterme oszillieren



→ Glätten der Kreuzterme durch Tiefpassfilterung

3. Kreuzterme bei der Wigner-Ville-Verteilung

Unterdrückung der Kreuzterme

- Verwendung des analytischen Signals

  → bei reellen Signalen keine Interferenz zwischen positiven und negativen Frequenzanteilen

- Cohen-Klasse

  → Multiplikation der Ambiguitätsfunktion mit einem Tiefpasskern

$$C_{xx}(t,f) = \mathcal{F}_\tau\{\mathcal{F}_\vartheta\{A_{xx}(\tau,\vartheta) \cdot \Phi(\tau,\vartheta)\}\}$$

  → Filterung der Wigner-Ville-Verteilung mit einer Tiefpassfunktion

$$C_{xx}(t,f) = W_{xx}(t,f) \underset{t',f'}{\overset{*}{*}} \mathcal{F}_\tau\{\mathcal{F}_\vartheta\{\Phi(\tau,\vartheta)\}\}$$

Aufgaben

Aufgabe 1:
Eigenschaften der Wigner-Ville-Verteilung

Zeigen Sie, dass die Auto-Wigner-Ville-Verteilung reell ist, selbst wenn das Signal komplex ist.

Aufgabe 2: Kreuzterme

Gegeben ist folgendes Signal:

$$y(t) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_0 t}$$

a) Bestimmen Sie den Wignerkern

$$w_{yy}(t,\tau) = y\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

b) Bestimmen Sie die Verteilung

$$W_{yy}(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{yy}(t,\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f \tau}\,\mathrm{d}\,\tau$$

c) Welcher Term des Ergebnisses entspricht dem Nutzterm, welcher dem Kreuzterm?

Aufgabe 3: Ambiguitätsfunktion, Moyals Formel

Gegeben ist folgendes Signal:

$$x(t) = \exp(-\beta t^2)$$

a) Berechnen Sie die Ambiguitätsfunktion $A_{xx}(\tau, \vartheta)$ des Signals $x(t)$

b) Bestimmen Sie die Signalenergie E_x

c) Wie lautet die Wigner-Ville-Verteilung $W_{xx}(t, f)$ des Signals $x(t)$

d) Zeigen Sie, dass

$$|\langle x(t), x(t)\rangle_t|^2 = \langle W_{xx}(t, f), W_{xx}(t, f)\rangle_{t,f}$$

gilt.

Aufgabe 3: Ambiguitätsfunktion, Moyals Formel

- **a)** Gegeben: $x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t^2}$, Gesucht : $A_{xx}(\tau,\vartheta)$

$$A_{xx}(\tau,\vartheta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\cdot x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\cdot \exp\left(\mathrm{j}\,2\pi\vartheta t\right)\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\beta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)^2 - \beta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)^2\right)\exp\left(\mathrm{j}\,2\pi\vartheta t\right)\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\beta t^2 - \beta\frac{\tau^2}{2}\right)\exp\left(\mathrm{j}\,2\pi\vartheta t\right)\,\mathrm{d}\,t$$

Inverse Fourier-Transformation

$$= \exp\left(-\beta\frac{\tau^2}{2}\right)\boxed{\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\beta t^2\right)\exp\left(\mathrm{j}\,2\pi\vartheta t\right)\,\mathrm{d}\,t}_{\mathcal{F}_t^{-1}}} \quad .$$

Aufgabe 3: Ambiguitätsfunktion, Moyals Formel

- Korrespondenz: $\exp\left(-at^2\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2}{a} f^2\right)$
- Dualität der FT: $s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet S(f) \quad \Leftrightarrow \quad S(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s(-f)$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2}{a} t^2\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \exp\left(-af^2\right)}$$

Ergebnis:

$$A_{xx}(\tau,\vartheta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \exp\left(-\beta \frac{\tau^2}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2}{2\beta} \vartheta^2\right)$$

Aufgabe 3: Ambiguitätsfunktion, Moyals Formel

- **b)** Gesucht: Signalenergie E_x

Die Signalenergie wird aus der Ambiguitätsfunktion berechnet:

$$A_{xx}(\tau,\vartheta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \exp\left(-\beta\frac{\tau^2}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2}{2\beta}\vartheta^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_x = A_{xx}(0,0) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}}$$

Alternativ: $$E_x = \langle x(t), x(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\beta t^2\right)\,\mathrm{d}\,t = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}$$

Aufgabe 3: Ambiguitätsfunktion, Moyals Formel

- **c)** Gesucht: Wigner-Ville-Verteilung des Signals

$$W_{xx}(t,f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\cdot x\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\exp\left(-\mathrm{j}\,2\pi f\tau\right)\,\mathrm{d}\,\tau$$

Hier Berechnung über Ambiguitätsfunktion:

$$W_{xx}(t,f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_{xx}(\tau,\vartheta)\exp\left(-\mathrm{j}\,2\pi\vartheta t\right)\,\mathrm{d}\,\vartheta\exp\left(-\mathrm{j}\,2\pi f\tau\right)\,\mathrm{d}\,\tau$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\exp\left(-\beta\frac{\tau^2}{2}\right)\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2}{2\beta}\vartheta^2\right)\exp\left(-\mathrm{j}\,2\pi\vartheta t\right)\exp\left(-\mathrm{j}\,2\pi f\tau\right)\,\mathrm{d}\,\vartheta\,\,\mathrm{d}\,\tau$$

Aufgabe 3: Ambiguitätsfunktion, Moyals Formel

$$W_{xx}(t,f) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\beta\frac{\tau^2}{2}\right) \cdot \exp\left(-\mathrm{j}\,2\pi f\tau\right)\,\mathrm{d}\,\tau$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2\beta}\vartheta^2\right) \exp\left(-\mathrm{j}\,2\pi\vartheta t\right)\,\mathrm{d}\,\vartheta$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\beta/2}} \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2}{\beta/2}f^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\pi^2/(2\beta)}} \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2}{\pi^2/(2\beta)}t^2\right)$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \cdot \exp\left(-2\beta t^2 - \frac{2}{\beta}\pi^2 f^2\right)}$$

Aufgabe 3: Ambiguitätsfunktion, Moyals Formel

- **d)** Zeigen, dass Moyals Formel gilt

$$|\langle x(t), x(t)\rangle_t|^2 = \langle W_{xx}(t,f), W_{xx}(t,f)\rangle_{t,f}$$

Linke Seite:

$$|\langle x(t), x(t)\rangle_t|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\beta t^2\right) \cdot \exp\left(-\beta t^2\right)\,\mathrm{d}\,t\right|^2$$

$$= \left|\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\right|^2$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{2\beta}}$$

Aufgabe 3: Ambiguitätsfunktion, Moyals Formel

Rechte Seite

$$\langle W_{xx}(t,f), W_{xx}(t,f)\rangle_{t,f} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\beta} \cdot \exp\left(-4\beta t^2 - \frac{4}{\beta}\pi^2 f^2\right)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,f$$

$$= \frac{2\pi}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty} \cdot \exp\left(-4\beta t^2\right)\,\mathrm{d}\,t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{4}{\beta}\pi^2 f^2\right)\,\mathrm{d}\,f$$

$$= \frac{2\pi}{\beta} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{4\beta}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{4\pi^2/\beta}}$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{2\beta}}$$

Aufgabe 5: Moyals Formel

Ein periodisches Signal $y(t)$ wird in eine Fourier-Reihe entwickelt:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi k f_0 t}$$

a) Berechnen Sie die Wigner-Ville-Verteilung $W_{yy}(t,f)$ des Signals.

b) Geben Sie das Signal $\tilde{W}_{yy}(t,f)$ an, das nur aus den Autotermen der Wigner-Ville-Verteilung zusammengesetzt ist.

c) Berechnen Sie mit Hilfe von Moyals Formel das Spektrogramm $S_y^{\gamma}(t,f)$. Als Analysefenster soll der Gauß-Impuls

$$\gamma(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right)$$

verwendet werden.

d) Berechnen Sie mit Hilfe von Moyals Formel das Skalogramm $\left|W_y^{\psi}(a,b)\right|^2$. Als Analysewavelet soll das Gabor-Wavelet

$$\psi(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_x t}$$

verwendet werden.

Aufgabe 5: Moyals Formel

- a)

Gegeben: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k \underbrace{\mathrm{e}^{j2\pi k f_0 t}}_{x_k(t)}$ Gesucht: $W_{yy}(t,f)$

$$W_{yy}(t,f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* W_{x_k x_l}(t,f)$$

1.) Berechnung von $W_{x_k x_l}(t,f)$:

$$W_{x_k x_l}(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_k\left(t+\frac{\tau}{2}\right) x_l^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \mathrm{e}^{-j2\pi f\tau} \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k f_0 \left(t+\frac{\tau}{2}\right)} e^{-j2\pi l f_0 \left(t-\frac{\tau}{2}\right)} e^{-j2\pi f\tau} \mathrm{d}\tau$$

Aufgabe 5: Moyals Formel

- a)

1.) Berechnung von $W_{x_k x_l}(t,f)$:

$$W_{x_k x_l}(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k f_0 \left(t+\frac{\tau}{2}\right)} e^{-j2\pi l f_0 \left(t-\frac{\tau}{2}\right)} e^{-j2\pi f \tau} \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi (k-l) f_0 t} e^{j2\pi \frac{k+l}{2} f_0 \tau} \mathrm{e}^{-j2\pi f \tau} \mathrm{d}\tau$$

$$= e^{j2\pi (k-l) f_0 t} \cdot \mathcal{F}_\tau\{\mathrm{e}^{j2\pi \frac{k+l}{2} f_0 \tau}\}$$

$$= e^{j2\pi (k-l) f_0 t} \cdot \delta\left(f - \frac{k+l}{2} f_0\right)$$

Aufgabe 5: Moyals Formel

- a)

1.) Berechnung von $W_{x_k x_l}(t,f)$:

$$W_{x_k x_l}(t,f) = e^{j2\pi(k-l)f_0 t} \cdot \delta\left(f - \frac{k+l}{2} f_0\right)$$

$$\Downarrow$$

$$W_{yy}(t,f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* e^{j2\pi(k-l)f_0 t} \cdot \delta\left(f - \frac{k+l}{2} f_0\right)$$

- b) Autoterme für $k = l$:

$$\tilde{W}_{yy}(t,f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |Y_k|^2 \delta(f - kf_0) \Rightarrow$$ zeitunabhängig

Aufgabe 5: Moyals Formel

- c)

Gesucht: Spektrogramm $S_y^{\gamma}(t,f)$ mit Hilfe von Moyals Formel und

$$\gamma(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right)}$$

Spektrogramm nach Moyals Formel:

$$S_y^{\gamma}(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{yy}(t',f')W_{\gamma\gamma}(t'-t,f'-f)\,\mathrm{d}t'\mathrm{d}f'$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t'}\delta\left(f' - \frac{k+l}{2}f_0\right)\underbrace{W_{\gamma\gamma}(t'-t,f'-f)}_{\text{Wigner-Ville-Verteilung des Analysefensters}}\mathrm{d}t'\mathrm{d}f'$$

Aufgabe 5: Moyals Formel

- c)

Wigner-Ville-Verteilung des Analysefensters:

$$W_{\gamma\gamma}(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\gamma^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$W_{\gamma\gamma}(t,f) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\left(t^2+\tau+\frac{\tau^2}{4}\right)}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}\left(t^2-\tau+\frac{\tau^2}{4}\right)}\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$W_{\gamma\gamma}(t,f) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\mathrm{e}^{-\beta t^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{4}\tau^2}\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$W_{\gamma\gamma}(t,f) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{4}\tau^2}\}$$

Aufgabe 5: Moyals Formel

- c)

  Wigner-Ville-Verteilung des Analysefensters:

$$W_{\gamma\gamma}(t,f) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \mathrm{e}^{-\beta t^2} \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{4}\tau^2}\}$$

$$W_{\gamma\gamma}(t,f) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \mathrm{e}^{-\beta t^2} \sqrt{\frac{4\pi}{\beta}} \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2 f^2}{\beta}}$$

$$W_{\gamma\gamma}(t,f) = 2\mathrm{e}^{-\beta t^2} \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2 f^2}{\beta}}$$

In Spektrogramm Formel einsetzen

Aufgabe 5: Moyals Formel

- c)

$$S_y^\gamma(t,f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_{yy}(t',f')\,W_{\gamma\gamma}(t'-t,f'-f)\,\mathrm{d}t'\mathrm{d}f'$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t'}\,\delta\left(f' - \frac{k+l}{2}f_0\right) W_{\gamma\gamma}(t'-t,f'-f)\,\mathrm{d}t'\mathrm{d}f'$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t'}\,W_{\gamma\gamma}\left(t'-t,\frac{k+l}{2}f_0 - f\right)\mathrm{d}t'$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t'}\,2\mathrm{e}^{-\beta(t'-t)^2}\,\mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(\frac{k+l}{2}f_0 - f\right)^2}\mathrm{d}t'$$

Aufgabe 5: Moyals Formel

- c)

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t'} 2\mathrm{e}^{-\beta\left(t'-t\right)^2} \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(\frac{k+l}{2}f_0-f\right)^2} \mathrm{d}t'$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(\frac{k+l}{2}f_0-f\right)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta\left(t'-t\right)^2} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t'} \mathrm{d}t'$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(\frac{k+l}{2}f_0-f\right)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta\left(t'-t\right)^2} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t'} \mathrm{d}t'$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(\frac{k+l}{2}f_0-f\right)^2} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t} \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-\beta t'^2}\}\big|_{f=-(k-l)f_0}$$

Aufgabe 5: Moyals Formel

- c)

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(\frac{k+l}{2} f_0 - f\right)^2} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t} \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-\beta t'^2}\}|_{f=-(k-l)f_0}$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(\frac{k+l}{2} f_0 - f\right)^2} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 (k-l)^2 f_0^2}{\beta}}$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(\frac{k+l}{2} f_0 - f\right)^2} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 (k-l)^2 f_0^2}{\beta}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t} \mathrm{e}^{-\frac{4\pi^2}{\beta}\left(\frac{k^2+l^2}{2} f_0^2 - (k+l) f_0 f + f^2\right)}$$

Aufgabe 5: Moyals Formel

- d)

Gesucht: Skalogramm $\left|W_y^{\psi}(a,b)\right|^2$ mit Hilfe von Moyals Formel und

$$\psi(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right)} \mathrm{e}^{j2\pi f_x t}$$

Skalogramm nach Moyals Formel:

$$\left|W_y^{\psi}(a,b)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{yy}(t,f)\, W_{\psi\psi}\left(\frac{t-b}{a}, af\right) \mathrm{d}f\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t}\, \delta\left(f - \frac{k+l}{2} f_0\right) \underbrace{W_{\psi\psi}\left(\frac{t-b}{a}, af\right)}_{\text{Wigner-Ville-Verteilung des Analysewavelets}} \mathrm{d}f\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 5: Moyals Formel

- d)

  Wigner-Ville-Verteilung des Analysewavelets

$$\psi(t) = \gamma(t) \cdot \mathrm{e}^{j2\pi f_x t}$$

$$\Rightarrow W_{\psi\psi}(t,f) = W_{\gamma\gamma}(t,f-f_x)$$

$$= 2\mathrm{e}^{-\beta t^2}\mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2(f-f_x)^2}{\beta}}$$

$\Rightarrow$ In Skalogramm Formel einsetzen

Aufgabe 5: Moyals Formel

- d)

$$\left|W_y^{\psi}(a,b)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{yy}(t,f)\, W_{\psi\psi}\left(\frac{t-b}{a}, af\right) \mathrm{d}f\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t}\, \delta\left(f - \frac{k+l}{2} f_0\right) W_{\psi\psi}\left(\frac{t-b}{a}, af\right) \mathrm{d}f\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t}\, W_{\psi\psi}\left(\frac{t-b}{a}, a\frac{k+l}{2} f_0\right) \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t}\, 2\mathrm{e}^{-\beta\left(\frac{t-b}{a}\right)^2} \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(a\frac{k+l}{2} f_0 - f_x\right)^2} \mathrm{d}t$$

Aufgabe 5: Moyals Formel

- d)

$$|W_y^{\psi}(a,b)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t} 2\mathrm{e}^{-\beta\left(\frac{t-b}{a}\right)^2} \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(a\frac{k+l}{2}f_0 - f_x\right)^2} \mathrm{d}t$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(a\frac{k+l}{2}f_0 - f_x\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta\left(\frac{t-b}{a}\right)^2} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t} \mathrm{d}t$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(a\frac{k+l}{2}f_0 - f_x\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta\left(\frac{t-b}{a}\right)^2} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t} \mathrm{d}t$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(a\frac{k+l}{2}f_0 - f_x\right)^2} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 b} \cdot \mathcal{F}\{e^{-\frac{\beta}{a^2}t^2}\}\Big|_{f=-(k-l)f_0}$$

Aufgabe 5: Moyals Formel

- d)

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(a\frac{k+l}{2}f_0 - f_x\right)^2} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 b} \cdot \mathcal{F}\{\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{a^2}t^2}\}\big|_{f=-(k-l)f_0}$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(a\frac{k+l}{2}f_0 - f_x\right)^2} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 b} |a| \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 a^2 (k-l)^2 f_0^2}{\beta}}$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{-4\frac{\pi^2}{\beta}\left(a\frac{k+l}{2}f_0 - f_x\right)^2} \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 b} |a| \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 a^2 (k-l)^2 f_0^2}{\beta}}$$

$$= 2|a|\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 b} \mathrm{e}^{-\frac{4\pi^2}{\beta}\left(\frac{k^2+l^2}{2}a^2 f_0^2 - (k+l)a f_0 f_x + f_x^2\right)}$$

Aufgabe 5: Moyals Formel

- d)

$$|W_y^{\psi}(a,b)|^2 = 2|a|\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 b}\mathrm{e}^{-\frac{4\pi^2}{\beta}\left(\frac{k^2+l^2}{2}a^2 f_0^2-(k+l)af_0 f_x+f_x^2\right)}$$

Mit den Substitutionen $t = b$ und $f = \dfrac{f_x}{a}$ ergibt sich die Zeit-Frequenz-Darstellung:

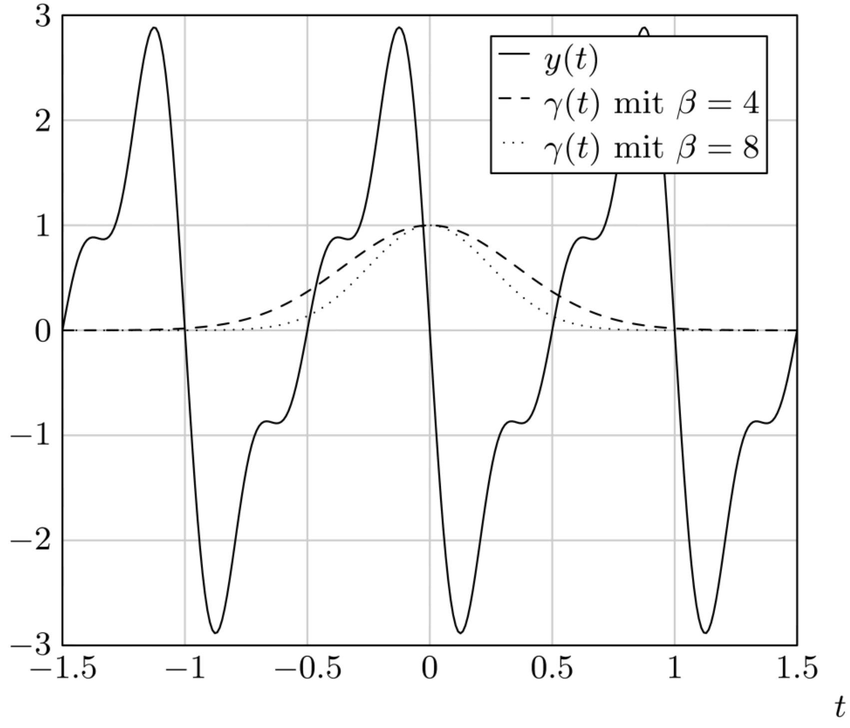
$$|W_y^{\psi}(t,f)|^2 = 2\left|\frac{f_x}{f}\right|\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} Y_k Y_l^* \mathrm{e}^{j2\pi(k-l)f_0 t}$$

$$\cdot\mathrm{e}^{-\frac{4\pi^2}{\beta}\left(\frac{k^2+l^2}{2}\frac{f_x^2 f_0^2}{f^2}-(k+l)\frac{f_0 f_x^2}{f}+f_x^2\right)}$$

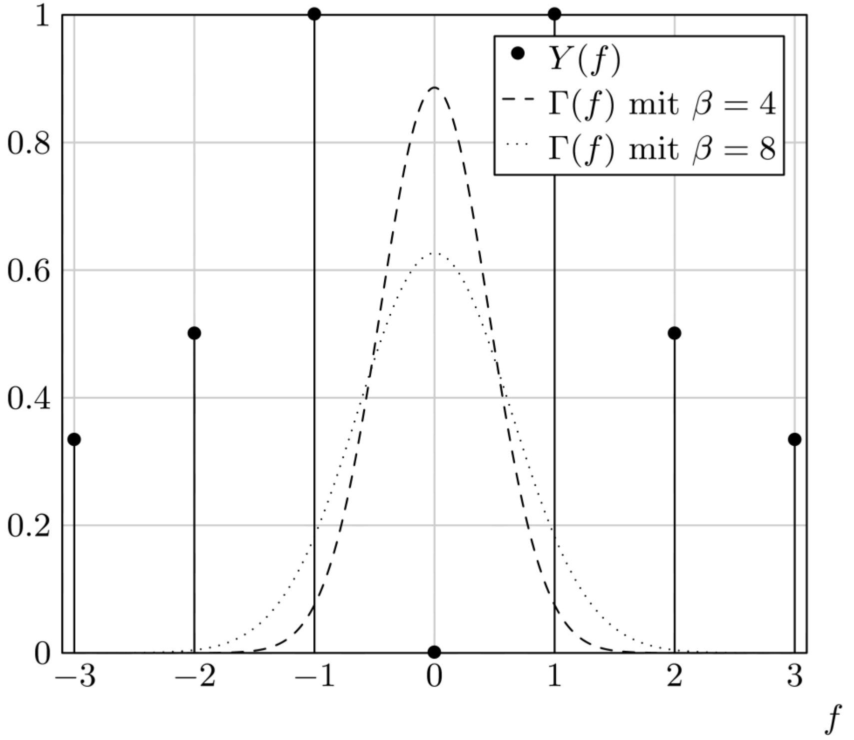
Aufgabe 5: Moyals Formel

Veranschaulichung

Periodisches Signal & Analysefenster

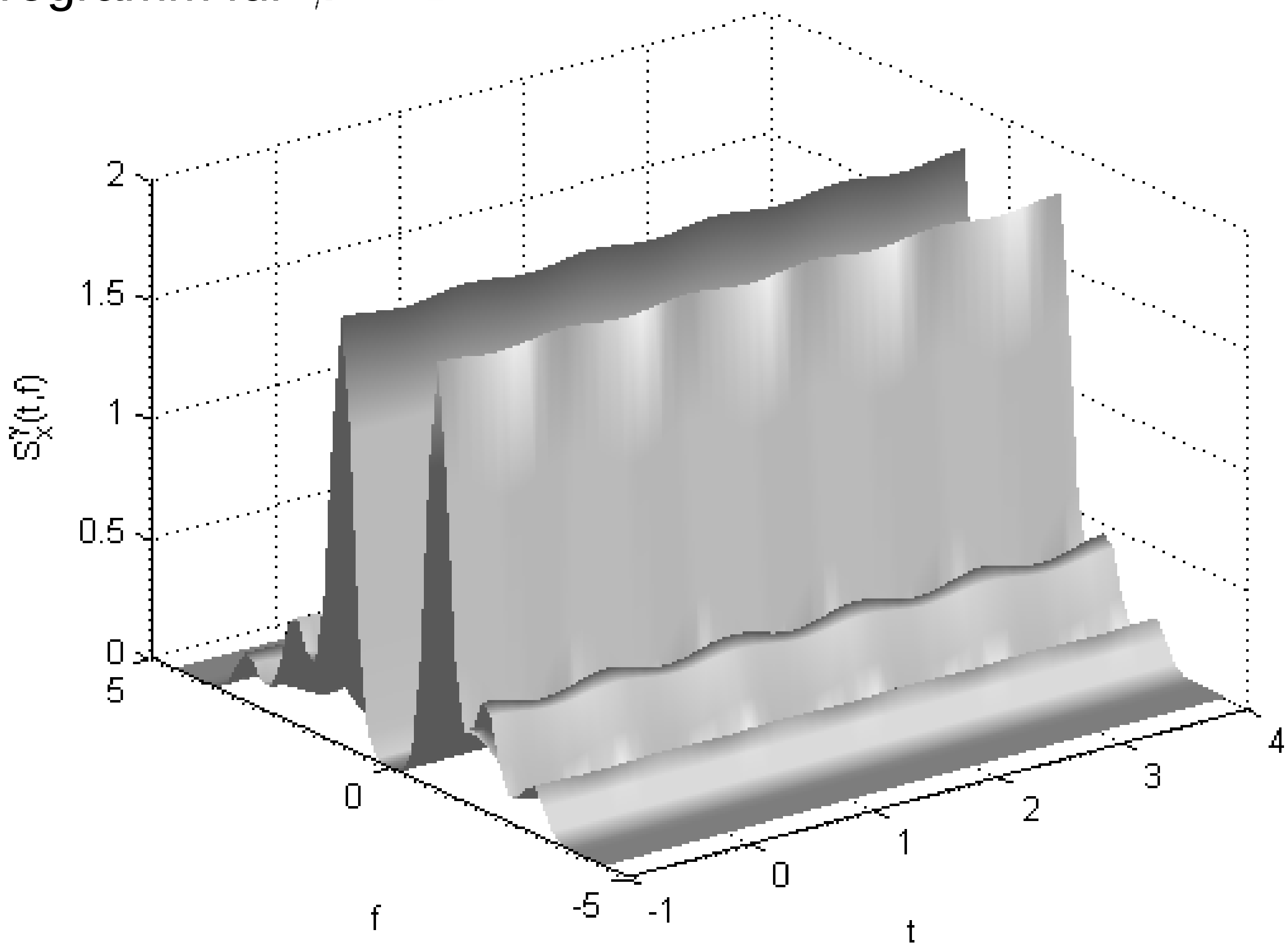


Fourier-Koeffizienten



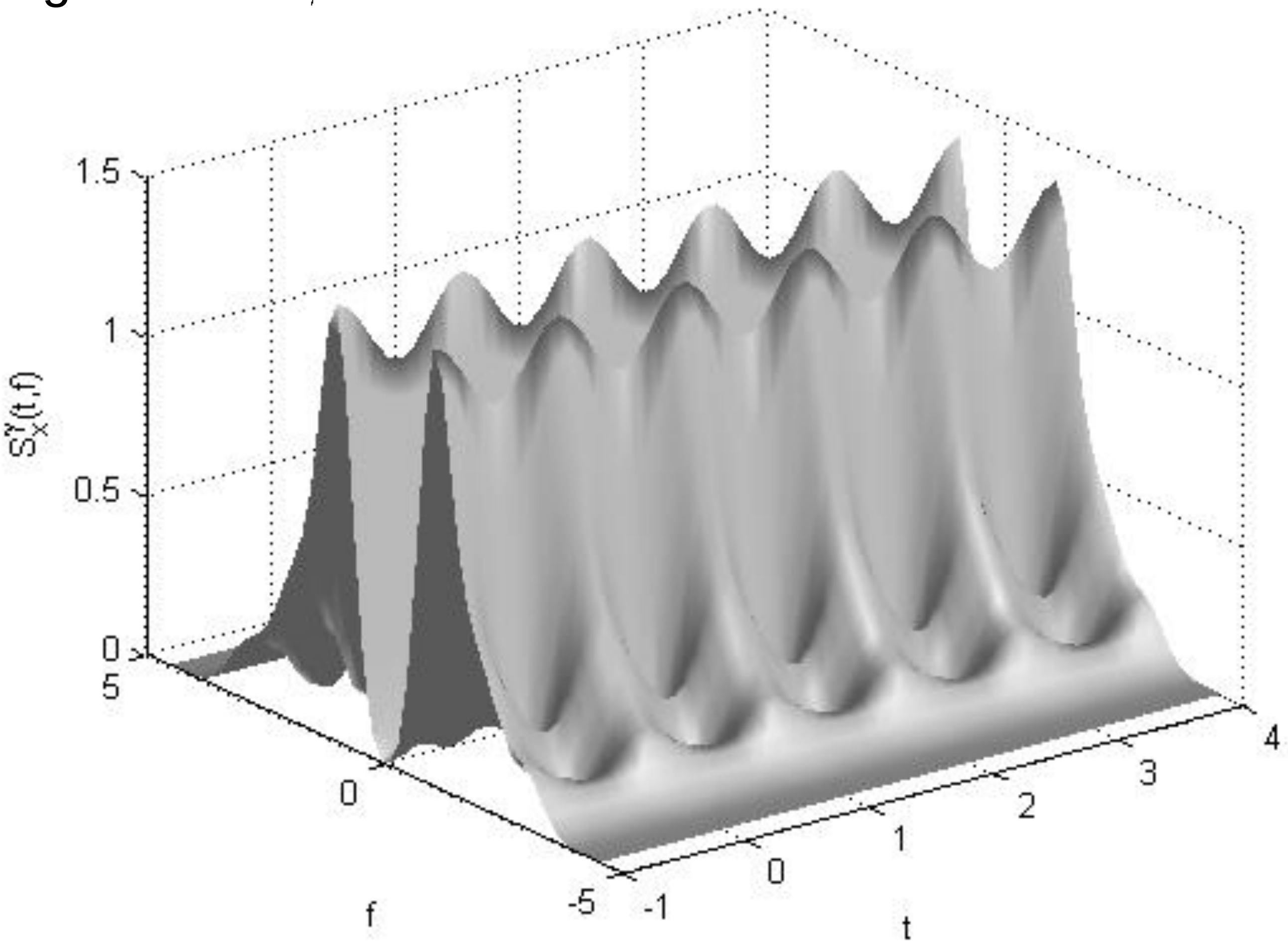
Aufgabe 5: Moyals Formel

Spektrogramm für $\beta = 4$



Aufgabe 5: Moyals Formel

Spektrogramm für $\beta = 8$



Aufgabe 5: Moyals Formel

Skalogramm für $\beta = 8,\ f_x = 3$